行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

重力理論的一些課題

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC93-2112-M-032-008-
執行期間：93 年 08 月 01 日至 94 年 07 月 31 日
執行單位：淡江大學物理學系

計畫主持人：曹慶堂

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 94 年 10 月 11 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

重力理論的一些課題
Some Topics in Gravity Theory

計畫編號：NSC 93-2112-M-032-008
執行期限：93 年 8 月 1 日至 94 年 7 月 31 日
主持人：曹慶堂　　淡江大學物理系

一、中文摘要

我們考慮在 S^1/Z_2 下，二維 ϕ^4 理論的真空結構。對於 orbifold 的大小為可變時，在 $L_c = 2\pi/m$ 將會有相變發生，其中 m 為 ϕ 的質量。當 $L < L_c$，只有唯一的真空，當 $L > L_c$，則有兩個簡併真空。我們也得到在這些真空解附近的一個迴圈的量子修正項，在 $L < L_c$ 下為精確解，對於 L 大於而接近 L_c 有微擾的解。

關鍵詞：真空結構、orbifold、相變

Abstract

We consider the vacuum structure of two-dimensional ϕ^4 theory on S^1/Z_2. When the size of the orbifold is varied, a phase transition occurs at $L_c = 2\pi/m$, where m is the mass of ϕ. For $L < L_c$, there is a unique vacuum, while for $L > L_c$, there are two degenerate vacua. We also obtain the 1-loop quantum corrections around these vacuum solutions, exactly in the case of $L < L_c$ and perturbatively for L greater than but close to L_c.

Keywords: vacuum structure、orbifold、phase transition

二、緣由與目的

場論的真空結構和孤立子解在 compact 維度的情形有戲劇性改變。一個有名的例子是 Hosotani 機制[1]，在非簡單連結空間中，場強度為零不代表規範(gauge)場為零。然後不為零的規範場有規範對稱破壞的意義。這關於非簡單連結的空間，場可以有不同的，但又與規範對稱一致的邊界條件[2]。另一方面，也可以探討在整體對稱情形下，真空結構和這些邊界條件的關連性[3]。

孤立子解也可以跟這些邊界條件有關。譬如，當 compact 空間為一個圓時，就是說當週期性邊界條件被加入純場[4]，有對稱破壞位能的二維 ϕ^4 理論的 kink 解將會消失。他們可以被 sphaleron 解來取代，即成對的 kink 和反 kink。由於空間是 compact 的，有限能量不再是可能孤立子解的限制。因此，這些解的拓樸歸類也必須有所修正。

除了 compact 的圓外，也可以考慮像 S^1/Z_2 的 orbifold，這關係到內部維度的反射或宇稱作用[5]，以及平移的等價。最近，有很多建立 orbifold 額外維度的 GUT 模型的工作。這是一種簡單的方法，在代表物理維度的固定點，得到 chiral 費米子[6]。Hosotani 機制也可以在 orbifold[7] 的 compact 空間下實現，不需要 Higgs 場而在這些模型，使得對稱破壞成為可能。

為了能夠更詳細了解在 orbifold 中的純量場特性，我們考慮二維 ϕ^4 的簡單例子。在這個模型下，大部分的分析都可以完全進行。我們會考慮純量場在 S^1/Z_2 orbifold，真空解和他們的量子修正項。另一方面，我們得到的結果也可以應用到高維度的理論。

三、結果和討論

我們考慮在(1+1)維上的ϕ^4理論,

$$L=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2-U(\phi), \tag{1}$$

其中

$$U(\phi)=\frac{\lambda}{4}\left(\phi^2-\frac{m^2}{\lambda}\right)^2. \tag{2}$$

首先在不同空間維度的尺度下，我們從S^1[4]的靜態解導出在S^1/Z_2真空解。然後利用 zeta-function regularization[8]的方法來計算這些解的量子修正項。

A. 真空解

對於式(1)Lagrangian 的運動方程

$$-\partial^2\phi-U'(\phi)=0, \tag{3}$$

假如我們祇考慮靜態解，

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\left(-U'(\phi)\right). \tag{4}$$

這只是牛頓的第二定律，其中x視為時間。在這圓S^1上，假如加上週期性的條件，$\phi(x+L)=\phi(x)$，其中L為圓的週長，那真空解[4]將可以得到，如下

$$\phi_v=\pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \tag{5}$$

不穩定的解為，

$$\phi_0=0, \tag{6}$$

週期性的解，

$$\phi_n=\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}}\right)sn\left[\frac{m}{\sqrt{1+k^2}}x\right], \tag{7}$$

其中sn為 Jacobi 橢圓函數，ϕ_n包含 n 對 kink 和反 kink。L,n之間的的關係和參數$k(0\le k\le 1)$是

$$L=\frac{4n\sqrt{1+k^2}}{m}K(k) \tag{8}$$

因為$K(0)=\pi/2$是$K(k)$的最小值，可允許解ϕ_n的數目會隨著L而增加。譬如說，一個 kink-反 kink 對只存在$L\ge L_1=2\pi/m$的條件下。在那圓上，ϕ_0和ϕ_n都是不穩定且衰變真空解ϕ_v。這些組態的能量-在 kink

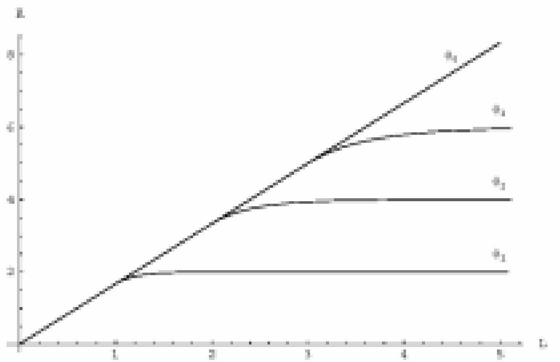


圖 1: 靜態解的能量(能量單位$E_0=2\sqrt{2}m^3/3\lambda$)變化對於圓的大小(長度單位$L_1$).

能量為$E_0=2\sqrt{2}m^3/3\lambda$，為$L$變數的函數如圖 1 [4]所示。對於$L<L_1$，$\phi_0$是理論上唯一不穩定的解，並且被詮釋成 sphaleron 解。對於$L>L_1$，ϕ_1也是一個不穩定的解，因為它比ϕ_0的能量低，便變成一個 sphaleron 的解。

在 orbifold S^1/Z_2，將x的範圍定在$-L/2<x<L/2$之間。因為 Lagrangian 在$\phi\to-\phi$ 轉換下的不變性，要求

$$\phi(-x)=\pm\phi(x), \tag{9}$$

可以將宇稱放到這場裡。如果將正宇稱的條件放到這場中，將不會有太大的改變。然而，將負宇稱放進來，這真空結構會有重大的改變。要求場有 orbifold 的條件，

$$\phi(-x)=-\phi(x), \tag{10}$$

真空解ϕ_v會被排除，因為他們有偶宇稱。然後，對於$L<L_1$，ϕ_0成為唯一的真空解，對於$L>L_1$，

$$\phi_{\pm 1}=\pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}}\right)sn\left[\frac{m}{\sqrt{1+k^2}}x\right], \tag{11}$$

k滿足$\sqrt{1+k^2}K(k)=mL/4$，是簡併真空解。注意由於 orbifold 條件-平移對稱的靜態破壞，以致於ϕ_1和ϕ_{-1}不再是相同的解。當L變化時，會發生相變。臨界週長為，

$$L_c=L_1=\frac{2\pi}{m}. \tag{12}$$

注意到這相變特別跟 orbifold 結構有關是件有趣的事。這不會發生在有週期性邊界條件的圓上。這對$L<L_c$，我們有唯一真空解ϕ_0。在L_c上，ϕ_0會分裂為三個解，

ϕ_0,ϕ_1和ϕ_{-1}。$\phi_{\pm1}$變成簡併真空並且ϕ_0為 sphaleron 解。當 orbifold 在高維理論中被當成額外維度時，上述的相變將會跟真空結構相關。

真空解的穩定性可以在其附近用微擾來分析[4]。在$L<L_1$下的$\phi_0=0$，微擾方程式為

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}+(\omega^2+m^2)\eta=0, \tag{13}$$

其中，$\phi(x,t)=\phi_0+\eta(x)e^{-i\omega t}$。這是一個簡諧震盪方程式。加入週期性邊界條件，這解是簡單地

$$\eta_0 \sim const, \tag{14}$$

伴隨著頻率為$\omega_0^2=-m^2$，並且

$$\eta_p \sim \sin\frac{2\pi px}{L},\cos\frac{2\pi px}{L} \tag{15}$$

和

$$\omega_p^2=\frac{4\pi^2p^2}{L^2}-m^2=m^2\left[\left(\frac{L_1}{L}\right)^2p^2-1\right], \tag{16}$$

$p=1,2.\cdots$

最低的能量態是在ϕ_0是不穩定的負模式，而且會衰變成真空解。現在，假如 orbifold 條件加入，這個負模式因為是偶數而被排除。ϕ_0是穩定且在$L<L_1$的情況下，是唯一的基態。

同樣的，對於$L>L_1$條件下，可以分析$\phi_{\pm1}$的穩定性。這裡微擾的微分方程式變成[9]

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}+\left(\omega^2+m^2-3\lambda\phi_1^2\right)\eta=0. \tag{17}$$

這是 Lamé 方程式. 這個例子裡有五個本徵函數是由 Lamé 多項式求得，其餘則由 Lamé transcendental 函數[10]，最低的能量態是一個負模式，

$$\eta_0(z)=sn^2(z)-\frac{1}{3k^2}\left(1+k^2+\sqrt{1-k^2\left(1-k^2\right)}\right), \tag{18}$$

其中$z=mx/\sqrt{1+k^2}$，其頻率為

$$\omega^2=m^2\left(1-\frac{2\sqrt{1-k^2(1-k^2)}}{1+k^2}\right)\le 0. \tag{19}$$

再次指出在圓上的$\phi_{\pm1}$是不穩定的，並且衰變到真空解。注意這個負模式有偶宇稱。Orbifold 條件也會排出這個模式, 而且提供$\phi_{\pm1}$穩定。下一個態是零模式，

$$\eta_1(z)=cn(z)dn(z). \tag{20}$$

此模式也是偶宇稱。這個的呈現跟ϕ_n平移(旋轉)對稱有關。orbifold 條件也會將此模式排除在外，因為 orbifold 破壞ϕ_n的平移對稱。其他三個 Lamé 多項式態為

$$\eta_3(z)=sn(z)dn(z);\omega_3^2=\frac{3m^2k^2}{1+k^2} \tag{21}$$

$$\eta_4(z)=sn(z)dn(z);\omega_4^2=\frac{3m^2}{1+k^2} \tag{22}$$

其中兩者都是奇宇稱，

$$\eta_5(z)=sn^2(z)-\frac{1}{3k^2}\left(1+k^2-\sqrt{1-k^2\left(1-k^2\right)}\right) \tag{23}$$

這是偶宇稱，其中

$$\omega_5^2=m^2\left(1+\frac{2\sqrt{1-k^2\left(1-k^2\right)}}{1+k^2}\right). \tag{24}$$

orbifold 條件也排除了$\eta_5(z)$。即使其餘譜圖不能明顯的了解，還是可以看出這本徵函數的宇稱擁有的模式:偶、偶、奇、奇、偶、偶、…。因此，譜圖的另一半將會正確地滿足 orbifold 條件。

B. 量子修正項

接下來，我們會對於真空能量來計算一圈的修正。對於$L<L_1$，真空解ϕ_0的古典能量是

$$M_{cl}[\phi_0]=\frac{m^4L}{4\lambda}. \tag{25}$$

利用(16)式微擾的譜圖可以很明確地對於此能量求出量子修正項，

$$\begin{aligned}(\Delta M)_{\phi_0}&=\frac{mL_1}{2L}\sum_{p=1}^{\infty}\left[p^2-\left(\frac{L}{L_1}\right)^2\right]^{1/2}\\&=\lim_{s\to-1}\frac{1}{2}\left(\frac{mL_1}{L}\right)^{-s}\sum_{p=1}^{\infty}\left[p^2-\left(\frac{L}{L_1}\right)^2\right]^{-s/2}.\end{aligned} \tag{26}$$

這裡我們使用 zeta 函數重整化方法[8]。用黎曼 zeta 函數，上面的總合可以表示成

$$\left(\Delta M\right)_{\phi_0} =$$

$$\lim_{s\to -1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{mL_1}{L}\right)^{-s}\zeta(s)\right.$$

$$+\left(\frac{L}{2L_1}\right)^2 s\left(\frac{mL_1}{L}\right)^{-s} + \zeta(2+s)\left(\frac{mL_1}{L}\right)^{-s}$$

$$\left.\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(1-s/2)}{2\Gamma(n+1)\Gamma(1-n-s/2)}\left(\frac{L}{L_1}\right)^{2n}\zeta(2n+s)\right]. \tag{27}$$

第一項,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{mL_1}{L}\right)\zeta(-1) = -\frac{\pi}{12L}, \tag{28}$$

這是在 orbifold 上的無質量純場的手徵能量。當 $L\to 0$ 時,則會發散。第二項為,

$$\lim_{s\to -1}\left(\frac{L}{2L_1}\right)^2 s\left(\frac{mL_1}{L}\right)^{-s}\zeta(2+s) = \lim_{s\to -1}\frac{m^2 L}{8\pi}\left[-\frac{1}{s+1}+1-\gamma+\ln\left(\frac{2\pi}{L}\right)\right]. \tag{29}$$

藉由適當的質量重整化程序,此發散部分可以被抵銷。事實上,質量重整化對於二維 ϕ^4 理論是唯一的需求。最後一項,

$$m\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{4\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)}\left(\frac{L}{L_1}\right)^{2n-1}\zeta(2n-1)$$

$$\equiv mf\left(L/L_1\right), \tag{30}$$

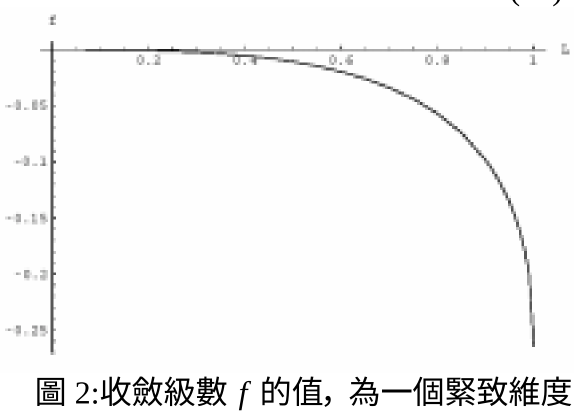


圖 2:收斂級數 f 的值,為一個緊致維度大小(長度單位為 L_1)的函數

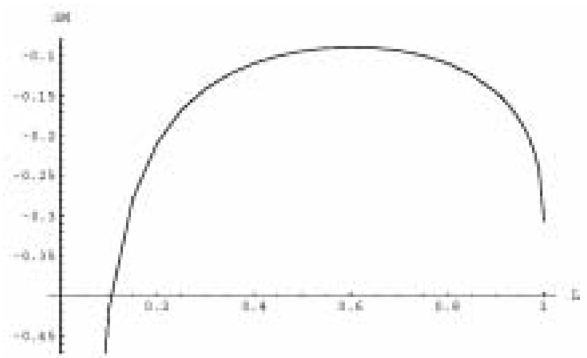
在圖 2 中,對於 $0\le L\le L_1$, $f\left(L/L_1\right)$是一個收斂的級數,其中 $f(1)=-0.264$。把這些全放在一起,經過質量重整化,

$$\left(\Delta M\right)_{\phi_0}^{ren} = -\frac{\pi}{12L}+mf\left(L/L_1\right), \tag{31}$$

如圖 3 所示。我們有

$$\lim_{L\to 0}\left(\Delta M\right)_{\phi_0}^{ren} = -m\left(\frac{L_1}{24L}\right); \qquad \lim_{L\to L_1}\left(\Delta M\right)_{\phi_0}^{ren} = -0.306m. \tag{32}$$

圖 3:一迴圈量子修正項(質量單位是 m)的



值, 為緊致維度大小(長度單位是 L_1)的函數

對於 $L>L_1$ 真空解 $\phi_{\pm 1}$ 顯示在圖 1 中。由於在這個例子的微擾譜圖不是很解析地了解,不能像上面處理 ϕ_0 一樣清楚地求得量子修正項。一個求得 $\phi_{\pm 1}$ 能量的量子修正項的近似方式是採用 k 冪次的級數,橢圓函數的模型參數。如[4]所示,可以求得微擾 $\phi_{\pm 1}$ 在 k 冪次的本徵解。到階次 k^2,我們有

$$\omega_p^2 = \begin{cases} 3k^2m^2, & p=1 \\ m^2\left(p^2-1\right)-\frac{3}{2}k^2m^2\left(p^2-2\right), & p=2,3,\cdots \end{cases} \tag{33}$$

因此,

$$\left(\Delta M\right)_{\phi\pm 1} = \left(\Delta M\right)_{\phi_0}^{ren}\Big|_{L=L_1} + m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)+O\left(k^2\right)$$

$$= m\left(-0.306+\frac{\sqrt{3}}{2}k+O\left(k^2\right)\right) \tag{34}$$

僅有 $p=1$ 的項在階次 k 對於 $\left(\Delta M\right)_{\phi\pm 1}^{ren}$ 有貢獻。從圖 3,我們可以在 $L<L_1$ 看出對於真空能量的量子修正項隨著 L 接近 L_1 而減少。另一方面,在 $L>L_1$,修正項會隨著 k 或 L 增加。在 $L=2\pi/m$,有一個不連續的總真空能量在第一次微分時(Eq.(12)),再次

地指出我們提到的相變。

四、計劃成果自評

在我們考慮在 orbifold S^1/Z_2 下的(1+1)維 ϕ^4 理論的真空結構。當 orbifold 的尺寸改變時，我們發現在 $L = L_c = 2\pi/m$ 有相變。在 $L < L_c$，有一個唯一古典真空解 $\phi_0 = 0$，在 $L > L_c$ 時則有兩個簡併態 ϕ_1, ϕ_{-1}。值得注意的是，只有在加入 orbifold 條件和週期邊界條件下，才會發生相變。這種現象以前被忽略，因為在 $L \to \infty$ 的極限下，這常用來建構 orbifold GUT 模型。當考慮到動態 compact 維度的情況，尤其在早期宇宙天文的起始值，我們這樣的相變將會變得重要。

我們使用 zeta 函數重整化來處理發散的量，也可計算在波色子分布下的真空解，得出量子修正項。如圖 3 所示，這修正項主要貢獻是由小 L 的本徵能量和 $L \to 0$ 時，它將跑到負的無窮。另一方面，當 $L \to L_c$ 時，它將會降低至有限值。對於 $L > L_c$，我們使用微擾的方法來近似量子修正項。對於 L 接近 L_c，修正項將隨著 L 增加。因此，量子修正項在 $L = L_c$ 有一個掉落值並且在斜率上為不連續，這是現在相變的指標。

這個結果也會關聯到較高維的情況。例如，有一維為 orbifold 的五維情形下，場可以用四維乘上一個跟 orbifold 有關的維度來表示[6]。然後，針對內部維度大於或小於 L_c 的尺度，需要考慮到兩種不同的真空結構情形。

除了考慮較高維度的方向，當規範場放到 orbifold 上，看看真空結構是否會像孤立子解。在[12]中，單磁弦論解是會產生 orbifold 的情況，其中跟 compact 維度是無關的。在這樣關聯下，我們也可以看看 instanton 或 caloron 的解，在伴隨或沒有伴隨 non-trivial holonomy 下，即是否有對稱破壞或沒有[13,14]。我們希望在未來可以觀察這些情況。

五、參考文獻

[1] Y. Hosotani, Phys. Lett. B **126**, 309(1983); Ann. Phys. **190**, 233 (1989).
[2] J. Scherk and J. H. Schwarz, Phys. Lett. B 82, 179 (1979).
[3] H. Hatanaka, S. Matsumoto, K. Ohnishi, and M. Sakamoto, Phys. Rev. D 63, 105003 (2001).
[4] N. S. Manton and T. M. Samols, Phys. Lett. B 207, 179(1988).
[5] see, e.g., M. Quiros, hep-ph/0302189.
[6] H. Georgi, A. K. Grant, and G. Hailu, Phys. Rev. D 63, 064027 (2001); Phys. Lett. B 506, 207 (2001).
[7] Y. Hosotani, S. Noda, and K. Takenaga, Phys. Rev. D 69, 125014 (2004).
[8] See, e.g., E.Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytsenko, and S. Zerbini, Zeta Regularization Techniques with Applications (World Scientific, Singapore, 1994).
[9] J.-Q. Liang, H. J. W. Müller, and D. H. Tchrakian, Phys. Lett. B 282, 105 (1992).
[10] F. M. Arscott, Periodic Differential Equations (Pergamon, Oxford, 1964).
[11] R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, Phys. Rev. D 10, 4130 (1974).
[12] R. Dermisek, S. Raby, and S. Nandi, Nucl. Phys. B 641, 327 (2002).
[13] D. J. Gross, R. D. Pisarski, and L. G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. 53, 43 (1981).
[14] T. C. Kraan and P. van Baal, Nucl. Phys. B 533, 627 (1998).